УДК 111:119

Букин Д.Н.
Волгоградский государственный университет

ЧИСЛО И ВЕЛИЧИНА КАК ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ КАТЕГОРИИ КОЛИЧЕСТВА

D. Bukin
Volgograd State University

NUMBER AND QUANTITY AS ONTOLOGICAL CERTAINTIES OF THE CATEGORY "QUANTITY"

Аннотация. Неотделимость качества от бытия предмета не вызывает сомнений, однако очень часто качественного отождествления или различения объектов или их сторон явно недостаточно, необходим переход к познанию количества. Какое бы определение количества мы ни взяли при этом, его суть невозможно выразить, не прибегая к математическим понятиям «число» или «величина»: количество есть либо то, что может быть выражено числом, либо то, что может быть измерено. В статье показано, что данные понятия являются онтологическими определённостями, в своём единстве наполняющими всеобщее содержание категории количества.

Ключевые слова: онтологическая категория, количество, математический объект, число, величина.

Abstract. It is undoubtful that quality is inseparable from object's being, however qualitative identifications or distinctions of objects or their aspects are not enough and a need arises for quantity comprehension. Whatever definition of quantity we use, its essence can't be expressed without resorting to the mathematical concepts of «number» or «value» as quantity is something that can be expressed either by a number or measured. The article shows that these concepts are ontological certainties which make the content of the category "quantity".

Key words: ontological category, quantity, mathematical object, number, value.

Как известно, математика изучает прежде всего *количественные отношения* в мире – на это указывают не только философы (Энгельс), но и сами математики (Д'Аламбер, Гаусс и др.). С точки зрения учения о бытии это означает, что всякий объект математики, выделяемый как онтологически самостоятельная сущность, должен быть определён *количественно*. С одной стороны, если бы у конкретного математического объекта, например, квадрата, не было такого качественного признака, как, собственно, «быть квадратным», то мы не смогли бы отличить его не то что от стереометрических, но и от других планиметрических (треугольника, восьмиугольника и т.п.) фигур. С другой стороны, когда вопрос «отличается ли?» сменяется вопросами «почему отличается?» и «насколько отличается?», мы начинаем *пересчитывать* число сторон квадрата («четыре»), а в некоторых случаях (чтобы не спутать его, например, с трапецией), и число градусов в углах при основаниях.

В.Н. Сагатовский пишет: «*Изменения*, происходящие в сущем, не всегда ведут к смене его качества. Такие изменения в первом приближении именуются количественными (на обыденном уровне их называют «мелкими, незначительными, несущественными»). Философ, естественно, за этим обыденным словоупотреблением должен увидеть его *категориальную* суть. Уже на естественнонаучном уровне первое, что бросается в глаза, – это числовой, измеряемый характер количества» [5, с. 61]. В самом деле, едва ли у кого-нибудь в настоящее время вызовет сомнение то обстоятельство, что «утверждения как математики, так и естествознания количественно детализируемы, так или иначе подводимы под категорию «числа» («величины»)» [4, с. 82]. Однако, на наш взгляд, проблема «категориальной сути» количества значительно шире обыденного, специально научного и т. д. словоупотреблений – это проблема «метауровня», то есть онтологическая. Цель дальнейшего изложения – показать, что именно единство «величины» и «числа» составляет онтологическую определённость категории количества, выражаясь в её всеобщем содержании. Начнём с числа.

Ответить на прямой вопрос, что такое число и каким должно быть адекватное определение этого понятия, довольно непросто. С математической точки зрения, число можно определить как объект, детерминируемый системой операций, применимых к нему (для такого определения вполне подходит, например, система арифметических аксиом Пеано). Очевидно, однако, что с философской точки зрения подобное определение числа не является полным и убедительным.

Основной проблемой, возникающей при попытках дать логическую дефиницию числа, является отсутствие всякой возможности определить его родо-видовым способом. Не принесли успеха и попытки определить число как «предикат предикатов» (даже если само оно может быть понято как «свойство свойства», то не каждое вторичное свойство является числом – налицо некорректная попытка подвести искомое понятие под некоторую общую схему, которая не является однозначно определяющей, то есть работает и для других сущностей).

Определение понятия «число» словами естественного языка затруднительно, так как оно является продуктом многих обобщений, рассматриваемым по-разному и в разных отношениях. Л. Витгенштейн в своё время показал, что понятие «число» (наряду с понятиями «игра», «язык» и т. д.) относится к специфическим, поскольку его объём есть чётко фиксированный класс, но содержание не отражает признака, присущего исключительно элементам этого класса. Другими словами, такое понятие содержит информацию о признаках, присущих отдельным подклассам этого класса. Это означает, что понятие «число» может быть определено методом «семейных сходств», то есть через указание на признаки, присущие всем натуральным числам, комплексным числам, трансфинитным числам и т. д. Пересекаясь и исключая друг друга, подклассы, задаваемые этими признаками, в итоге задают *класс чисел*. При этом понятия, видовые по отношению к понятию числа (натуральное число, иррациональное число и т. п.) являются классическими и могут быть определены родовидовым способом.

Рассматривая «число» как собирательное понятие, сделаем основной упор на его онтологическую функцию прояснения всеобщей категории количества. Для этого помимо логико-философского инструментария нам потребуются некоторые примеры из истории математической науки.

Итак, впервые число появляется на уровне обобщения совокупностей чувственно воспринимаемых, хорошо знакомых и доступных объектов (два уха, две руки, пять пальцев на руке и т. п.). В дальнейшем открытое таким образом свойство *численности* используется для пересчитывания других предметов. Записи чисел в это время ещё не существует, все действия выполняются непосредственным пересчётом предметов, сложенных в одну кучу или разделённых на более мелкие кучки. В частности, это характерно для древнеиндийской и древнеегипетской математик, в которых отсутствует абстрактное определение понятия числа.

Далее понятие конкретного числа обобщается до более абстрактной формы, так появляется *отвлечённое* определение понятия числа. В частности, у пифагорейцев (VII в. до н. э.) число представляется состоящим из отдельных единиц (палочек, камешков и других внешних по отношению к человеку предметов счёта). Позже близкие определения числа встречаем у Архимеда и Евклида (III в. до н. э.). Таким образом, на этой (условно будем считать её второй) стадии появляется абстрактное понятие числа, обобщающее множество уже известных конкретных чисел.

Дальнейшее развитие математики, сопровождаемое рядом абстрактных математических обобщений, привело к значительному расширению её предмета, в который, помимо прочего, вошло и новое понимание числа. Речь идёт о зарождении и развитии в математике *теоретико-множественного* подхода (назовём это третьей ступенью). Подчеркнём, что до этого момента понятие *множества* использовалось не в строгом смысле, относящемся к математической теории множеств, а в смысле общего представления о совокупности конечного числа объектов, которое «не является более сложным, чем понятие единичного предмета, и которое, несомненно, является элементом онтологического видения реальности» [3, с. 22].

О неявной связи понятий множества и числа было известно, по-видимому, ещё до «Парадоксов бесконечного» (1850 г.) Б. Больцано, однако то, что множество состоит из *чисел*, само по себе ещё ничего не меняет ни в понимании числа, ни в понимании количества. Наибольший интерес в этом отношении представляют введённые в конце XIX в. Г. Кантором понятия *счётного множества* (abzahlbar) и *мощности* (Machtigkeit) (примечательно, что первым разницу между счётным и несчётным множеством тридцатью годами ранее заметил Б. Больцано). Мощность множества или *кардинальное число множества* (от лат. *Cardinalis* – *cardo* – главное обстоятельство, стержень, сердцевина) – его главная количественная характеристика, обобщающая понятие *числа* его элементов. Сам Кантор определял мощность множества *M* как свойство, получаемое в ходе абстрагирования от качества элементов множества и от их порядка [1, с. 107]. Таким образом, после многократных обобщений «число» превратилось в самостоятельный абстрактный предмет исследования и приобрело значение *мощности множества*, внеся соответствующие дополнения в онтологическую определённость категории *количество*.

Очевидно, что понятия «число» и «количество» обозначают не одно и то же и имеют сложную взаимосвязь. Первое, возникшее как отражение познанного количества, постепенно подвергаясь всё большим обобщениям, становится абстрактным предметом математических исследований и в значительной мере уточняет и обогащает всеобщее содержание второго. Несмотря на то, что натуральные арифметические, действительные, комплексные числа, числа в матричном исчислении, кардинальные числа и т. д. существенно различаются в различных числовых системах, они всё-таки имеют нечто общее, сохраняют то самое сходство, которое и фиксируется нами благодаря количественной категориальной интуиции. Выражаясь в терминах логики, все эти подклассы класса чисел на разных этапах развития математической науки участвуют в прояснении содержания онтологической категории количества, демонстрируя многообразие его форм.

Однако вернёмся к нашему примеру с квадратами. Благодаря отдельным *числовым* характеристикам (число сторон фигуры, число градусов в углах между сторонами т. п.), мы можем легко отличить их от прочих геометрических фигур. Но тогда возникает вопрос: как различить *между собой* качественно однородные, и, следовательно, не различимые по качеству квадраты? Ответ, казалось бы, тот же: с помощью количества. Однако как в таком случае определить границы этой однородности так, чтобы мы не «перескочили», как это делалось выше, с помощью числовых характеристик сразу на другие фигуры – треугольники, трапеции и т.д. – минуя квадраты вообще? Для ответа на этот вопрос обратимся к следующей онтологической определенности категории количества, выражаемой понятием «величина».

Величина, так же, как и число, имеет количественную природу и является фундаментальным понятием для алгебры, теории функций, теории измерений, теории вероятностей и многих других основных разделов математического знания. Слово «величина» иногда употребляется за пределами математики для обозначения объективной количественной стороны какого-либо предмета, свойства или отношения. При этом в отличие от качественной стороны имеют в виду именно объективную степень проявленности или интенсивность свойства (объём – величина объёма; сила тока – величина силы тока, заработная плата – величина заработной платы и т. п.). Общее тематическое наполнение содержания понятия «величина» для некоторых исследователей даже является основанием считать величину, в отличие от числа, основным, «внутренним» моментом количества [2].

Прежде всего, «величина» – одно из основных математических понятий, возникшее как обобщение результатов измерений и подвергшееся дальнейшим неоднократным обобщениям. Величина уточняет понимание категории «количество» в области математических абстрактных объектов. Это уточнение достигается не столько общими представлениями о математической величине и её свойствах – понятие «величина», как и «число», в математике по существу собирательное, – сколько в уяснении аксиоматически вводимых терминов, таких, как «скалярная величина», «переменная величина», «бесконечно малая величина» и др. Общее значение математического понятия «величина» весьма близко к философскому значению категории «количество», но отличается от неё непосредственной применимостью к абстрактным математическим объектам (что, впрочем, не ограничивает применимости данного понятия к анализу сущих другой природы).

Более строгое значение математического термина «величина» задаётся набором аксиом. При строгом введении понятия «величина» имеется в виду уже не общее математическое представление о величинах, а конкретный термин – «положительная скалярная величина», «переменная величина» и т. п. Конкретная величина является элементом определённой системы, и, следовательно, её значение определяется структурой данной системы, подразумевающей отношения определённого типа.

Во многих математических системах соблюдаются аксиомы теории положительных скалярных величин, определяющие не только понятие «положительная скалярная величина», но и, в отдельных случаях, понятие «число». Так, поскольку система действительных положительных чисел в количественном отношении удовлетворяет аксиомам теории положительных скалярных величин, а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных величин, действительные числа (с количественной стороны) правомерно называть величинами. Это особенно принято при рассмотрении переменных величин.

Несмотря на то, что величина имеет количественное значение во всех системах величин, изучаемых математикой, «величина» (как и «число») в каждой новой системе величин может приобретать другое содержание. Отношение между величинами разнородных систем является предметом *теории размерностей*. В более обобщённом смысле величинами в математике называют векторы, тензоры и другие «нескалярные величины», которые, в отличие от скалярных величин, выражаемых одним числом, характеризуются не только абсолютным значением числа, но и другими характеристиками (например, для вектора – направлением, для тензора – массивом компонент и законом преобразования компонент при замене базиса и т. д.).

Итак, значение понятия «величина» с развитием математики подвергалось ряду обобщений и на данный момент не является однозначным термином – употребляется в нескольких значениях («скалярная величина», «нескалярная величина», «переменная величина» и т. п.). Проследим, какие смысловые «отпечатки» на протяжении веков накладывало понятие математической величины на содержание философской категории количества.

Первые попытки сформулировать свойства той самой величины, которую сегодня принято называть «положительной скалярной», предпринимаются уже в «Началах» Евклида (III в. до н. э.). Первоначальное понятие величины есть не что иное, как непосредственное обобщение конкретных понятий длины, площади, объёма и т. п.

Второй знаковой вехой в развитии математического понятия «величина» стало возникновение понятия *переменной, неизвестной* величины, появившееся как обобщение множества однотипных задач на нахождение некоторого численного решения. И если Диофант (II в. н. э.), по сути оперирующий понятием неизвестной, всё ещё не решается отойти от термина «число», то Омар Хайям (X в.) подходит к пониманию неизвестной величины более решительно: «Я утверждаю, что искусство алгебры и алмукабалы есть научное искусство, предмет которого составляют абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными» [7, с. 70-71]. Позже другой арабский математик ал-Каши (XV в. н. э.) и вовсе отделит понятие неизвестной от понятия числа.

Следующий этап расширения предмета математики за счёт нового, усложнённого понимания числа связан с появлением в ней *бесконечно малых величин*. Интуиция этих величин присутствует уже у древних греков, вычисляющих площади с точностью до произвольно малых остатков (метод исчерпывания). Позже она неотступно следует за развитием математической мысли, вдохновляя Кавальери и Роберваля (концепция неделимых), Ферма и Паскаля (инфинитезимальные методы) и т. д.

Однако наиболее яркую роль бесконечно малые величины сыграли в одном из так называемых «кризисов оснований», потрясшем европейскую математику в конце XVII – начале XIX вв. Введённые в математику для обоснования методов интегрирования и дифференцирования, такие величины далеко не сразу получили чёткое определение, что никак не устраивало математиков, считавших свою науку точной и не допускающей каких бы то ни было неопределённостей. Как известно, язык Ньютона и Лейбница, сформулировавших основы дифференциального исчисления, был всё же далёк от языка «эпсилон-дельта» Вейерштрасса (да и сами эти основы потребовали значительного переосмысления, что и было проделано, в частности, Коши). Особую, хотя и не до конца оценённую роль в разрешении сложившейся ситуации позже сыграли Кант и Гегель, которые, основываясь на современных им достижениях математики, довели анализ проблемы бесконечно малых до понимания их закономерной диалектической противоречивости. К сожалению, указания на диалектическую природу кризиса, данные величайшими представителями немецкой классической философии, не нашли должного отклика в среде математиков XIX столетия (за исключением, быть может, А. де Моргана и Б. Больцано).

Одним из важнейших с точки зрения нашего исследования обобщений, приведших к формированию особого понимания математической величины, является непосредственное обобщение понятий, изначально вырабатываемых в связи с измерениями длин, площадей, объёмов и т. п. Так возникают термины «*скалярная величина*» и «система скалярных величин».

Понятие «скаляр» в математику ввёл Виет (XVI в.). Создавая свою алгебру, он обнаружил, что к величинам могут быть отнесены не только длины, площади и объёмы, но и объекты, не имеющие геометрического смысла, о которых писали ещё Диофант и ал-Каши – квадрато-квадраты, квадрато-кубы и т. п. Именно благодаря тому, что эти степени восходят и образуют своего рода лестницу, Виет назвал их скалярами, то есть «ступеньками» (от лат. *scalaris* – ступенчатый). Современный нам термин *скалярная величина* был введён в математику несколько позже Гамильтоном (XIX в.). Чаще всего под такой величиной понимается математический объект, количественное значение которого может быть выражено одним действительным числом. Другими словами, скалярная величина определяется только своим *значением*, отличаясь тем самым от векторов, тензоров и т. п., выступающих её дальнейшими обобщениями. Рассмотрим их.

Вектором в обобщённом математическом смысле называется величина, описываемая, помимо скалярной характеристики, *направлением*. Отправной точкой создания данного сложного математического объекта послужила геометрическая интерпретация поля комплексных чисел, включающего операции над ними. Помимо уже упоминавшегося Гамильтона, в разработке векторной алгебры активное участие принимал его современник Грэйвс, а также Монж, Ашетт, Коши и Гаусс (последние понимали вектор как «подвижный радиус»).

Понятие «*тензор*» в математику также вводится Гамильтоном. Акцент в названии он делал на свойстве вектора растягиваться (от лат. *tendo* – натягивать, растягивать). В современной линейной алгебре под *тензором* понимают объект, линейно преобразующий элементы одного линейного пространства в элементы другого. То, что все компоненты тензора имеют *чис-*

ловое значение, с философской точки зрения свидетельствует о том, что как бы многократно не усложнялись и не обобщались структуры и величины в математике, в их основе всегда будет лежать *элементарная* категориальная интуиция количества.

С точки зрения некоторых философов, математические числа и величины не являются единственными формами *познанного* количества: «Количество может быть познано вне математических приёмов и вне процедур счёта и измерения. При этом познанное количество может быть выражено не числом и не с помощью математического понятия «величина», а другими способами. Используя сравнительную степень, например, прилагательных и наречий, формы единственного и множественного чисел как средства естественного языка, можно без математического понятия «число» (и без счёта и измерения) познать и выразить количество. В суждениях типа «Иванов выше (сильнее, умнее и т. п.) Петрова» количество ярко выражено и познано вне измерения и без выражения результатов в числе» [6, с. 25]. Мы не спешим соглашаться с данной позицией, поскольку в приведённых выше примерах количество едва ли может быть *выражено*, так как оно практически абстрагируется до степени «голой» качественности – интуитивно или визуально можно обнаружить, что Иванов действительно умнее или выше и сильнее Петрова, но так мы можем установить лишь то, что Иванов *не есть* Петров. Вывод о том, что первый действительно превосходит второго в чём-то, можно сделать лишь после того, как будут продемонстрированы (помыслены) и подвергнуты сравнению соответствующие числовые или интервальные значения (баллы на экзамене, число прочитанных книг, приседаний со штангой и т. д.).

Подводя итог, кратко резюмируем вышеизложенное:

1. В общем математическом представлении значения понятий «число» и «величина» близки к значению философской категории «количество», поскольку понятия «количество» и «количественное отношение» используются на самых различных уровнях исследования абстрактных математических объектов. В то же время, количество в общем случае нельзя отождествить ни с числом, ни с величиной хотя бы потому, что последние суть онтологические определённости, в своём единстве наполняющие всеобщее содержание категории количества. Кроме того, понятия числа и величины приобрели характер специальных математических терминов. И то, и другое в строгом смысле определяется аксиоматически вместе с определением той или иной системы (чисел или величин соответственно).

2. «Количество» конкретизируется в значении понятий «число» и «величина», их историко-математический и философский анализ занимают центральное место в исследовании возникновения и развития философской категории «количество».

ЛИТЕРАТУРА:

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений. – М.: Изд-во ЛКИ, 2012. – 248 с.
2. Ильин В.В. Онтологические и гносеологические функции категории качества и количества. – М.: Высшая школа, 1972. – 230 с.
3. Перминов В.Я. Деятельностная теория познания в философии арифметики // Число: Сб. статей. – М.: Пресс, 2009. – С. 5-35.
4. Пронин А.С., Ромашкин К.И. Об эффективности математики в научном познании // Вестник Московского государственного областного университета. – Серия «Философские науки». – 2012. – № 2. – С. 81-86.
5. Сагатовский В.Н. Философские категории. Ч. 1. Онтология. Авторский словарь. – СПб.: СПбНИУ ИТМО, 2011. – 127 с.
6. Тимофеев И.С. Методологическое значение категорий «качество» и «количество». – М.: Наука, 1972. – 216 с.
7. Хайям О. Трактаты. – М.: Изд-во вост. лит., 1961. – 328 с.